数理解析研究所講究録
第 1646 巻 2009 年 34-36

群の決定問題について

岡山大学理学部数学教室・田中　克己 (Katsumi Tanaka)
Department of Mathematics, Okayama University

1　決定不能理論

理論 T が決定可能とは、正しい文全ての集合が帰納的であることとします。そうでないとき、理論は決定不能といいます。

言語 $L=\{\circ\}$ において、次の３つの公理；

$$\forall x\forall y\forall z x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$$

$$\forall x\forall y\exists z x=y\circ z$$

$$\forall x\forall z\exists y x=y\circ z$$

を満たすすべてのモデルに共通な文の集合を群の理論といい TG と表すことにします。Alfred Tarski は論文 "Undecidability of the elementary theory of groups" の中で、理論 TG は決定不能であることを示しました。これは TG の任意のモデルに決定不能な理論のモデルが解釈されることを示したものです。

環の言語 $\{\cdot,+,0,1\}$ で体 $K=\langle K,\cdot,+,0,1\rangle$ に対し、K 上解釈可能な群についてはよく知られています。体 K 上の代数群、つまり、一般線形群 $GL(n,K)$ の閉部分群が代表例です。それは体 K 上、群が解釈されます。すなわち、ユニバースとして集合が K^{n^2} 上体の言語で定義可能で群の演算と単位元が体の言語で定義されます。

逆に、ある群構造上、とある環が解釈されることも知られています。その環の理論が決定不能であれば、群の理論も決定不能であることがわかります。

定理 1 任意の $n\geq 2$ に対し、n 元生成自由メタアーベル群の理論は決定不能である。

G を元 $a_1,\cdots,a_n$ から生成される自由メタアーベル群とします。論理式

$$\varphi(x)=\exists y(a_1y=ya_1\wedge x=a_2ya_2^{-1}y^{-1}\wedge xa_1=a_1x)$$

を考えます。

$a_1u=ua_1$ とすると、u は a^mz の形をしています。ここで、z は G の中心の元。よって、$\varphi(x)$ の解は $(a_2a_1a_2^{-1}a_1^{-1})^m$ の形をしています。

この形の元の全体を ζ とおきます。

この ζ 上に二つの演算を定義します；

$$z_1+z_2=z_1z_2$$

$$z_1\times z_2=x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$$

ここで、x_1, x_2 は群 G の元で次の条件を満たす任意の元とします。

$$a_2x_1 = x_1a_2, x_2a_1 = a_1x_2, z_i = a_ix_ia_i^{-1}x_i^{-1}(i = 1, 2)$$

と定めると、$\langle \zeta, +, \times \rangle$ は整数環と同型になります。つまり、群 G に整数環が解釈可能となり、群 G の理論は決定不能となります。

2 例

体を解釈する群についてはいくつか先行研究があります。

Mal'cev による Mal'cev 対応は、上三角行列群 $UT(3, K)$ 上体 K が解釈されます。

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおきます。ここで簡単のために、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{を } (a, b, c) \text{ と表すことにします。}$$

a_1 と可換な元 $y = (y, 0, *)$ と $x = (x, 0, *)$ に対して、

$$x = a_2ya_2^{-1}y^{-1}$$

より、

$$(x, 0, *) = (0, 0, y)。$$

よって、論理式 φ により定義される集合は群の中心になります。

Morley ランク有限なベキ零でない連結可解群は代数閉体を解釈します (Zil'ber)。

Nesin による Morley ランク 2 のベキ零群上の体の解釈があります。

例 2 標数 p の代数的閉体 K をとる。$K^2 \ni (a, b), (c, d)$ に対し

$$f(x, y) + f(x + y, z) = f(x, y + z) + f(y, z) \tag{1}$$

$$f(x, 0) = f(0, x) = 0 \tag{2}$$

をみたす $f(x, y)$ に対し、

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a + c, b + d + f(a, c))$$

と定義すると $(K^2, \cdot)$ はベキ零群となります。

上の群の上に体を解釈します。詳しくは [3] を参照してください。

$(x, y), (a, b) \in K^2$ に対し、

$$[(*, a), (*, x)] = [(*, 1), (*, y)]$$

$$[(*, 1), (*, x)] = [(*, b), (*, y)]$$

を考えると、

$$f(a, x) - f(x, a) = f(1, y) - f(y, 1)$$

「この連立方程式の解がちょうど p 個である」という条件が体を解釈するために必要な条件となります。体が代数的閉体であれば問題ありません。もしその理論が決定不能である体がこの条件をみたせば決定不能な 2 ステップべき零群の例となります。

参考文献

[1] A.I. Mal'cev. A correspondence between groups and rings. *The Mathematics of Algebraic Systems, Collected Papers: 1936-1967.* North-Holland, 1971.

[2] A. Borovik and A.Nesin. *Groups of Finite Morley Rank* Oxford, 1994.

[3] 田中　克己. 体を解釈する Morley ランク 2 の群. 京都大学数理解析研究所講究録,*1602* モデル理論の手法による無限構造の構成法. 2008 年 6 月.